



LADIF

ROTEIRO DA EXPERIÊNCIA

UFRJ

IF

Disciplina : **Mecânica** Tema : **Ondas (Figuras de Chladn)**

Código : **1H-07** Nome : **ONDAS ESTACIONÁRIAS EM PLACAS - 2**

Onde encontrar : **Salão Principal - Mesa 5**

Potencialidade : Observação das figuras formadas pela areia quando as frequências são variadas.

Palavras Chaves Modos normais de vibração.

Ref. Bibliográficas : A. P. French - "Waves", pag.205.

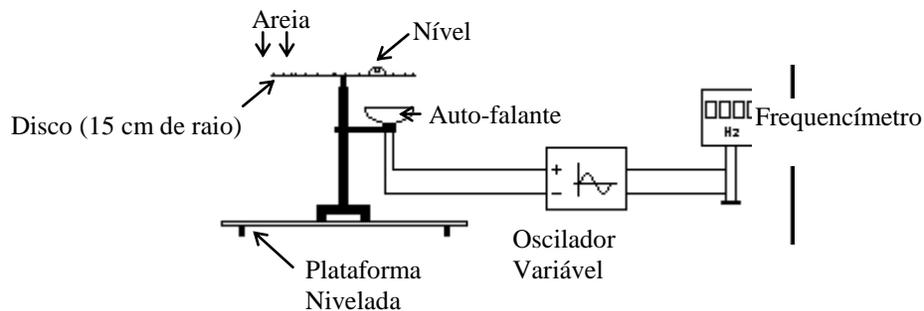
M. Nussenzweig - "Física Básica", vol II.

Roteiro da Experiência

Material Utilizado:

Kit da Pasco não transportável, composto de duas placas, uma retangular e outra circular, uma campandula, um frasco, saleiro, com areia, uma plataforma nivelada, uma fonte de frequências fixas e uma fonte de frequências variáveis.

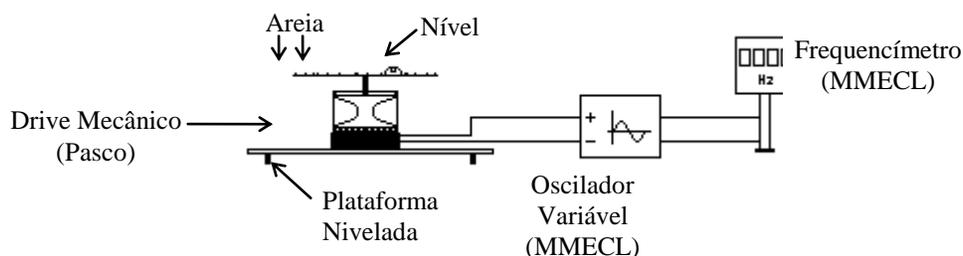
Montagem (1) : Usando materiais da MMECL. (Conforme figura abaixo).



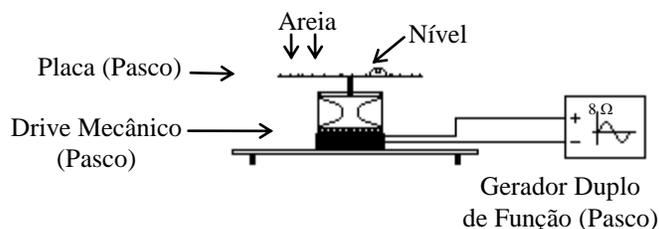
Procedimento :

- É importante o nivelamento do disco para que os grãos de areia se desloquem uniformemente sobre a placa.
- Ligue o alto-falante na saída variável do oscilador ($1 W_{RMS}$).
- Varie a frequência nas regiões recomendadas (as figuras se formam ao chegar perto da frequência certa).

Frequência (Hz)	270	284 - 297	417 - 420	440 - 447	664
Forma aproximada					

Montagem (2) :**Procedimento:**

- Ligue o driver na saída variável do oscilador.
- Varie a frequência nas regiões recomendadas, observando também a potência de volume.
- Ver folhas anexas (Frequências).

Montagem (3) :**Procedimento:**

- Ligue o driver na saída “8 Ω out” (volume máximo).
- Coloque o gerador 1 na função seno com modulação desligada (OFF).
- A amplitude é variável (baixa para baixas frequências)
- A leitura das frequências é feita através de leitura direta do potenciômetro.
- As frequências e figuras estão em anexo (Frequências).

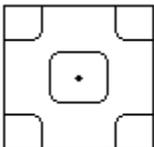
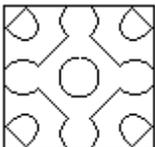
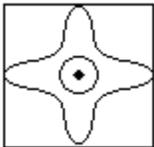
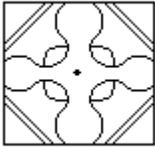
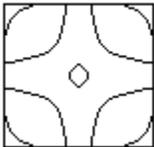
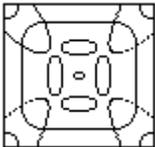
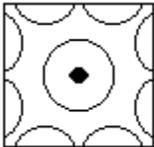
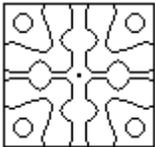
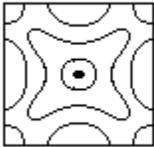
Observações:

- Quando variamos a frequência do oscilador variável para alcançarmos as frequências determinadas, as que formam figuras, notamos que a distribuição dos grãos de areia, sobre as devidas placas, pouco se alteram, mas quando as frequências se aproximam daquelas indicadas nas tabelas, em anexo, percebemos um rápido agrupamento destes grãos de areia formando as figuras tabeladas.
- A montagem 2 é a mais recomendável das três opções por sua simplicidade.

ELABORADO () POR: _____
 REVISADO () POR: _____
 DATA: ___/___/___

APROVADO: _____
 DATA: ___/___/___

ANEXO : Com frequências e figura nas placas quadrada e circular.

PLACA QUADRADA (l = 24 cm; m = 144 g; densidade = 2.5 kg/m)					
Frequência	Potência	Figura	Frequência	Potência	Figura
177	75 %		998 - 1000	100 %	
310 - 320	75 %		1300	100 %	
450 - 460	85 - 90 %		1635 - 1640	100 %	
740 - 750	85 - 90 %		1780	100 %	
897 - 904	90 %				

PLACA CIRCULAR (r = 12 cm; densidade = 2,5 kg/m)					
Freq. (Hz)	264	330	450	827 - 830	1600
Potência	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %

ELABORADO () POR: _____
 REVISADO () POR: _____
 DATA: ___/___/___

APROVADO: _____
 DATA: ___/___/___

Ondas estacionárias: Corda vibrante e Membrana retangular oscilante

A equação de ondas unidimensional é da forma:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Em que $y(x, t)$ descreve a oscilação de uma onda em uma corda vibrante de comprimento l e de velocidade v oscilando no eixo horizontal.

Tomando as extremidades fixas temos as seguintes condições de contorno:

$$y(0, t) = y(l, t) = 0$$

O que nos dá a solução:

$$y_n(x, t) = a_n \text{sen}(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n)$$

E as seguintes relações:

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}; \omega_n = \frac{n\pi}{l} v; f = \frac{nv}{2l}; \lambda_n = \frac{2l}{n}$$

Sendo δ_n uma constante de fase, k_n o número de onda, λ_n o comprimento de onda, ω_n a velocidade angular, v a velocidade linear e f a frequência.

Tal resultado descreve as possíveis ondas estacionárias, isto é, para cada estado a forma de onda não se altera e todos os elementos da corda oscilam com mesma frequência e constante de fase. Essas são descritas por uma equação que revela o fato de a onda não se propagar nesses modos, chamados de normais, sendo resultado da interferência entre ondas incidentes e refletidas.

E temos pela Lei de Taylor:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Sendo μ a densidade linear e T a tração a qual a corda é submetida. Substituindo essa última igualdade na relação da frequência:

$$f_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Logo, podemos prever os estados estacionários (modos normais ou harmônicos) dados o comprimento da corda, sua densidade linear e tração a que é submetida.

Analisando os harmônicos:

$$a_1 \text{sen}\left(n \frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi t v}{l} + \delta_n\right), l = n \frac{\lambda}{2}$$

Logo, ao longo do fio, pelas raízes do seno, temos pontos que não oscilam, chamados de nós:

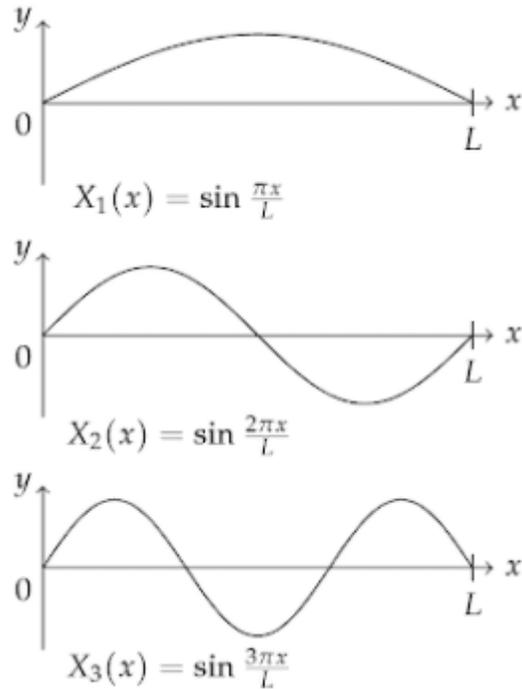
$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots, \frac{n\lambda}{2}, \text{ sendo } n \text{ par}$$

Também encontramos pontos de máximos e mínimos, chamados de ventres:

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \dots, \frac{n\lambda}{4}, \text{ sendo } n \text{ ímpar}$$

O primeiro, segundo e terceiro harmônico são representados abaixo:

ELABORADO () POR: _____ REVISADO () POR: _____ DATA: ___/___/___	APROVADO: _____ DATA: ___/___/___
---	--



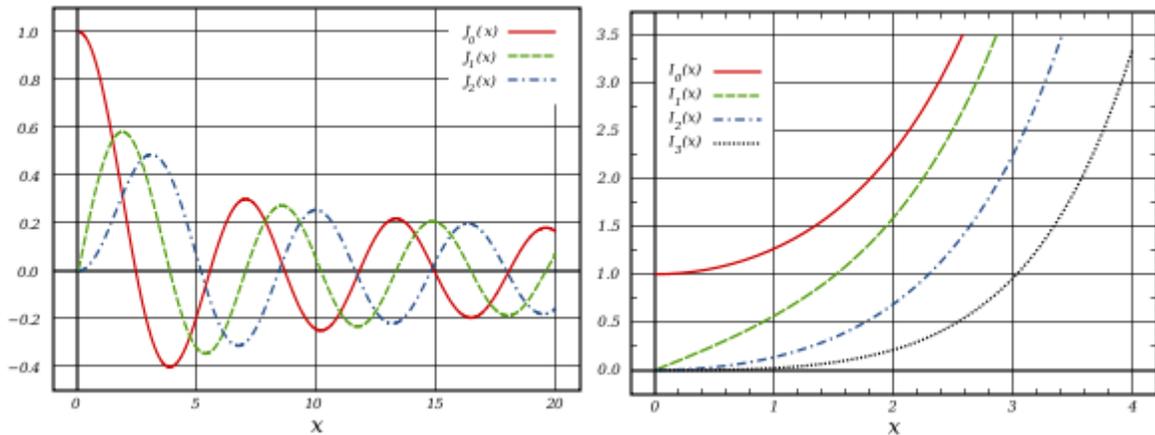
Analogamente, para uma membrana elástica bidimensional, a equação da onda $W(x, y, t)$ será:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

A solução geral para uma placa retangular (lados a e b) pode ser encontrada utilizando as funções de Bessel e sua versão modificada:

$$W_n(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_n J_{n-m}(kx) J_m(ky) + B_n I_{n-m}(kx) I_m(ky) \frac{\cos \frac{m\pi}{2}}{\sin \frac{m\pi}{2}}$$

As funções $J_n(x)$ e $I_n(x)$ são representadas graficamente abaixo:



As condições de contorno das bordas determinam as soluções, em que os números de onda permitirão encontrar as frequências das ondas estacionárias, num caso específico:

ELABORADO () POR: _____
 REVISADO () POR: _____
 DATA: ___/___/___

APROVADO: _____
 DATA: ___/___/___

$$W|_{x=0} = 0, \quad W|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 0$$

$$W|_{y=0} = 0, \quad W|_{y=b} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right|_{y=b} = 0$$

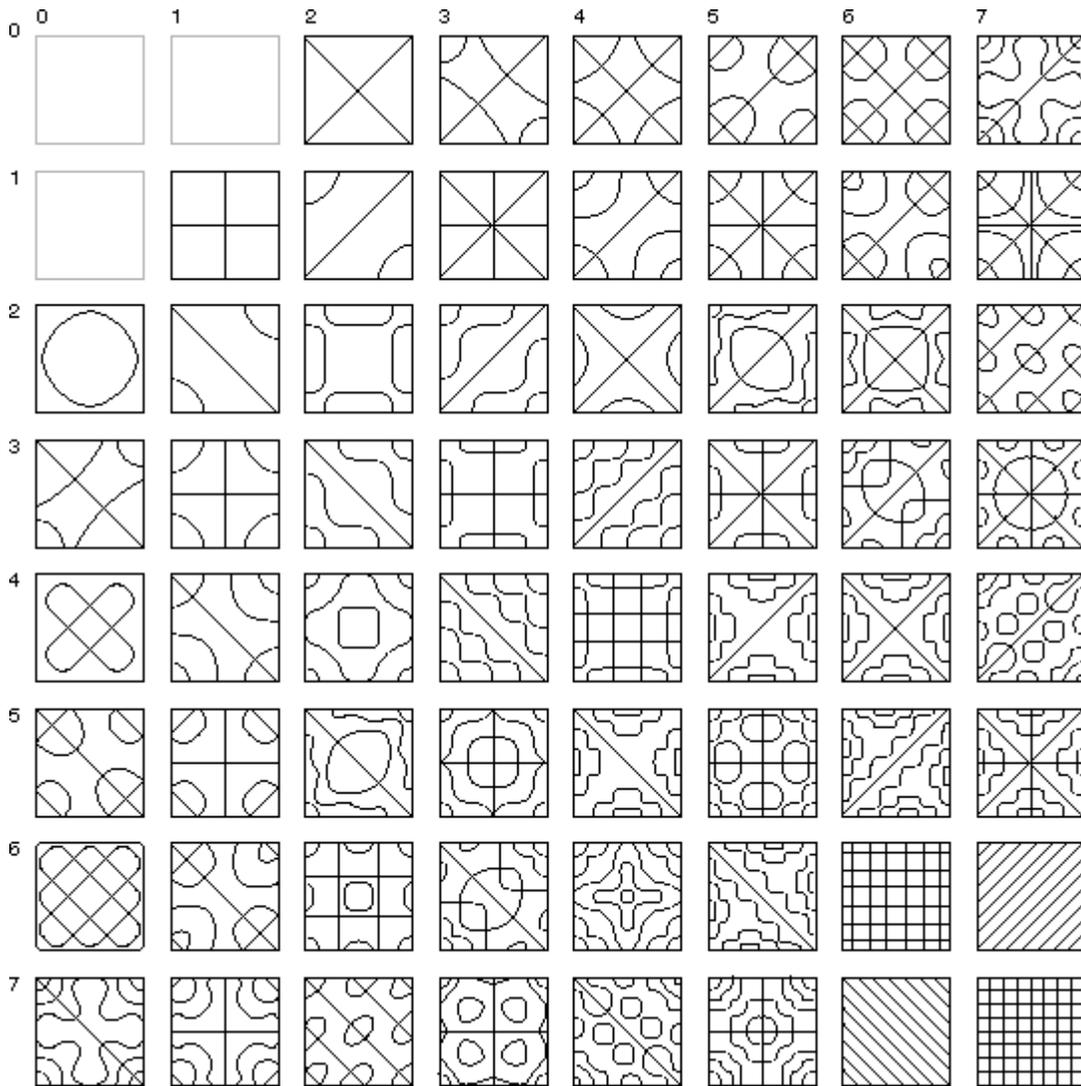
Podemos assim obter o seguinte resultado:

$$W_{n,m} = (A_n \{J_{n-m}(kx) + J_{n-m}[k(a-x)]\} \{J_m(ky) + J_m[k(b-y)]\} \\ + B_n \{I_{n-m}(kx) + I_{n-m}[k(a-x)]\} \{I_m(ky) \\ + I_m[k(b-y)]\}) \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2}$$

m ímpar e n par

Logo, de forma similar ao caso unidimensional, haverá regiões nodais (raízes da equação), em que a placa não vibra, e regiões de maior amplitude de vibração, regiões antinodais. Tal fenômeno pode ser facilmente visualizado ao depositar grãos de areia na superfície da placa, pois, nas frequências estacionárias, os grãos se acumulam nas regiões nodais e se afastam das antinodais. As primeiras combinações de harmônicos são representadas na figura abaixo:

ELABORADO () POR: _____ REVISADO () POR: _____ DATA: ___/___/___	APROVADO: _____ DATA: ___/___/___
--	--------------------------------------



Referências:

- A Course in Mathematical Methods for Physicists, Russell L. Herman. Cap. 11
- Journal of Applied Mechanics NOVEMBER 2007, Vol. 74 / 1251. Exact Solutions for Free-Vibration Analysis of Rectangular Plates Using Bessel Functions
- Curso de Física Básica - Vol 2 - Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor. Moyses Nussenzveig. Cap. 5.

Autor: Salazar Travancas Neto. (05/04/2018)

ELABORADO () POR: _____ REVISADO () POR: _____ DATA: ___/___/___	APROVADO: _____ DATA: ___/___/___
---	--